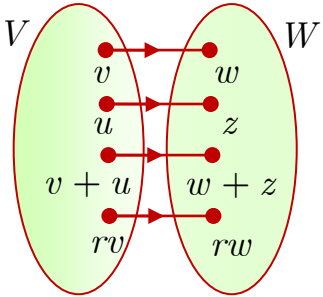
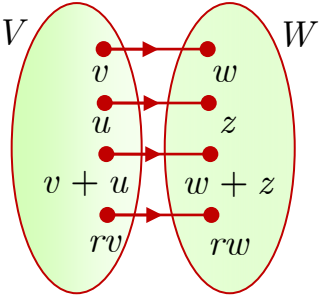


یکسانی دو فضای برداری

$T : V \to W$

- یک به یک و پوشا
- ساختار جبری این دو فضای برداری را حفظ کند

$$T(v+u) = T(v) + T(u) \qquad T(rv) = rT(v)$$

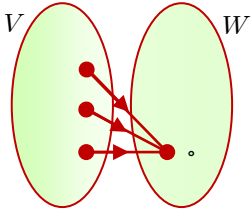


نگاشت خطی

نگاشتی که ساختار جبری دو فضای برداری را حفظ کند

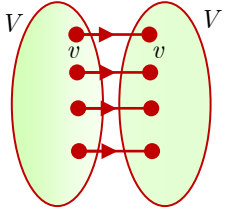
$$T : V \to W$$
$$T(v+u) = T(v) + T(u)$$
$$T(rv) = rT(v)$$

$$T : V \to W$$
$$T(v+ru) = T(v) + rT(u)$$



نگاشت صفر

$$\circ : V \to W; \quad \circ(v) = \circ$$



نگاشت همانی

$$I_V : V \to V; \quad I_V(v) = v$$

ویژگی‌های نگاشت خطی

$$T(\circ) = \circ$$

$$T(-u) = -T(u)$$

$$T(r_1 u_1 + \cdots + r_k v_k) = r_1 T(u_1) + \cdots + r_k T(v_k)$$

ویژگی‌های نگاشت خطی

$$T(\circ) = \circ$$

$$T(-u) = -T(u)$$

$$T(r_1 u_1 + \cdots + r_k u_k) = r_1 T(u_1) + \cdots + r_k T(u_k)$$

ویژگی‌های نگاشت خطی

$$T(0) = 0$$
$$T(-u) = -T(u)$$
$$T(r_1 v_1 + \cdots + r_k v_k) = r_1 T(v_1) + \cdots + r_k T(v_k)$$

ویژگی‌های نگاشت خطی

$$T(0) = 0$$
$$T(-u) = -T(u)$$
$$T(r_1 v_1 + \cdots + r_k v_k) = r_1 T(v_1) + \cdots + r_k T(v_k)$$

قضیه. فرض کنید $\{v_1, \ldots, v_n\}$ **یک پایه برای** V **و** $w_1, \ldots, w_n$ **اعضایی دلخواه از** W **(نه لزوماً متمایز و یا ناصفر) باشند نگاشت خطی یکتای** $T : V \to W$ **وجود دارد که برای هر** i **داشته باشیم** $T(v_i) = w_i$.

اثبات. (یکتایی)

$$T,U : V \to W; \quad T(v_i) = w_i = U(v_i)$$

اثبات. (یکتایی)

$$T,U : V \to W; \quad T(v_i) = w_i = U(v_i)$$

$$T(v) = T(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) = t_1 T(v_1) + \cdots + t_n T(v_n) = t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n$$
$$U(v) = U(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) = t_1 U(v_1) + \cdots + t_n U(v_n) = t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n$$

اثبات. (یکتایی)

$$T,U : V \to W; \quad T(v_i) = w_i = U(v_i)$$

$$T(v) = T(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) = t_1 T(v_1) + \cdots + t_n T(v_n) = t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n$$
$$U(v) = U(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) = t_1 U(v_1) + \cdots + t_n U(v_n) = t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n$$

اثبات. (یکتایی)

$$T,U : V \to W; \quad T(v_i) = w_i = U(v_i)$$

$$T(v) = T(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) = t_1 T(v_1) + \cdots + t_n T(v_n) = t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n$$
$$U(v) = U(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) = t_1 U(v_1) + \cdots + t_n U(v_n) = t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n$$

اثبات. (وجود)

هر بردار نمایش یکتا به صورت $v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$ دارد.

اثبات. (وجود)

هر بردار نمایش یکتا به صورت $v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$ دارد.

$$T : V \to W$$
$$T(v) = T(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) := t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n$$

اثبات. (وجود)

هر بردار نمایش یکتا به صورت $v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$ دارد.

$$T : V \to W$$

$$T(v) = T(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) := t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n$$

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n \qquad u = s_1 v_1 + \cdots + s_n v_n$$

نگاشت‌های خطی

اثبات. (وجود)

هر بردار نمایش یکتا به صورت $v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$ دارد.

$$T : V \to W$$
$$T(v) = T(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) := t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n$$

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n \qquad u = s_1 v_1 + \cdots + s_n v_n$$

$$\begin{aligned} T(v + ru) &= T((t_1 + rs_1)v_1 + \cdots + (t_n + rs_n)v_n) \\ &= (t_1 + rs_1)w_1 + \cdots + (t_n + rs_n)w_n \\ &= (t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n) + r(s_1 w_1 + \cdots + s_n w_n) = T(v) + rT(u) \end{aligned}$$

نگاشت‌های خطی

اثبات. (وجود)

هر بردار نمایش یکتا به صورت $v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$ دارد.

$$T : V \to W$$
$$T(v) = T(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) := t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n$$

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n \qquad u = s_1 v_1 + \cdots + s_n v_n$$

$$\begin{aligned} T(v + ru) &= T((t_1 + rs_1)v_1 + \cdots + (t_n + rs_n)v_n) \\ &= (t_1 + rs_1)w_1 + \cdots + (t_n + rs_n)w_n \\ &= (t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n) + r(s_1 w_1 + \cdots + s_n w_n) = T(v) + rT(u) \end{aligned}$$

اثبات. (وجود)

هر بردار نمایش یکتا به صورت $v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$ دارد.

$$T : V \to W$$
$$T(v) = T(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) := t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n$$

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n \qquad\qquad u = s_1 v_1 + \cdots + s_n v_n$$

$$\begin{aligned} T(v + ru) &= T((t_1 + rs_1)v_1 + \cdots + (t_n + rs_n)v_n) \\ &= (t_1 + rs_1)w_1 + \cdots + (t_n + rs_n)w_n \\ &= (t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n) + r(s_1 w_1 + \cdots + s_n w_n) = T(v) + rT(u) \end{aligned}$$

نگاشت‌های خطی یک به یک

$$\begin{aligned} T(u) = T(v) \quad &\Leftrightarrow \quad T(u) - T(v) = ۰ \\ &\Leftrightarrow \quad T(u - v) = ۰ \end{aligned}$$

نگاشت‌های خطی یک به یک

$$\begin{aligned} T(u) = T(v) \quad &\Leftrightarrow \quad T(u) - T(v) = ۰ \\ &\Leftrightarrow \quad T(u - v) = ۰ \end{aligned}$$

هسته یا پوچی T

$$\ker T := \{v \in V : T(v) = ۰\}$$

هسته T زیر فضایی از V است.

هسته T زیر فضایی از V است.

ناتهی

هسته T زیر فضایی از V است.

ناتهی

برای هر $u, v \in \ker T$ و هر اسکالر $r \in F$ داریم

$$T(u + rv) = T(u) + rT(v) = ۰ + r.۰ = ۰$$

هسته T زیر فضایی از V است.

ناتهی

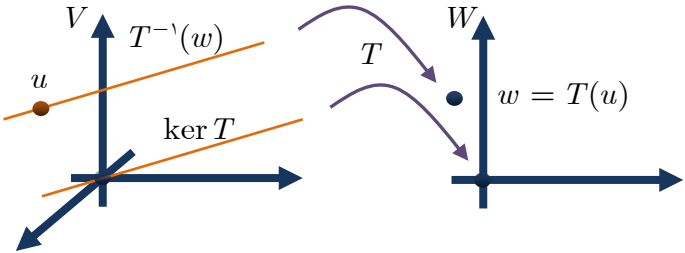
برای هر $u, v \in \ker T$ و هر اسکالر $r \in F$ داریم

$$T(u + rv) = T(u) + rT(v) = 0 + r.0 = 0$$

$T : V \to W$ **یک به یک است** $\Leftrightarrow$ $\ker T = \{0\}$

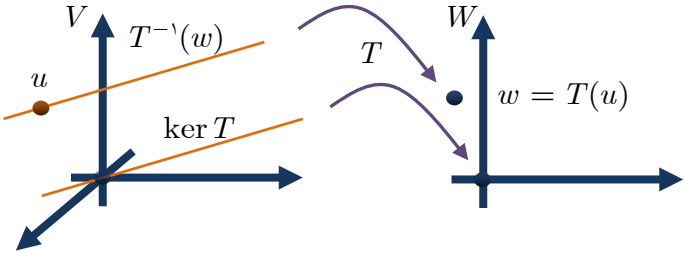
سطوح تراز یک نگاشت خطی

$$T^{-1}(w) := \{v \in V : T(v) = w\} = u + \ker T$$



سطوح تراز یک نگاشت خطی

$$T(v) = w = T(u) \quad \Leftrightarrow \quad T(v-u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v - u \in \ker T$$
$$\Leftrightarrow \quad v \in u + \ker T$$



نگاشت‌های خطی پوشا

تصویر یک نگاشت

$$\operatorname{Im} T := \{T(v) \ : \ v \in V\}$$

نگاشت‌های خطی پوشا

تصویر یک نگاشت

$$\operatorname{Im} T := \{T(v) \ : \ v \in V\}$$

تصویر نگاشت خطی $T : V \to W$ یک زیر فضای W است.

نگاشت‌های خطی پوشا

تصویر یک نگاشت

$$\operatorname{Im} T := \{T(v) \ : \ v \in V\}$$

تصویر نگاشت خطی $T : V \to W$ یک زیر فضای W است.

$$T(v_1) = w_1 \qquad T(v_2) = w_2$$

$$w_1 + rw_2 = T(v_1) + rT(v_2) = T(v_1 + rv_2) \in \operatorname{Im} T$$

تصویر نگاشت خطی

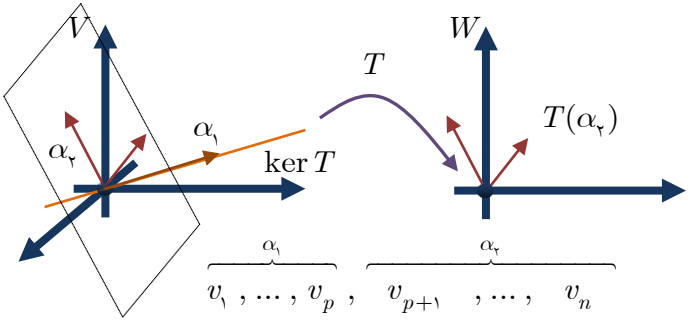
$$V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im} T = \langle T(v_1), \ldots, T(v_k) \rangle$$

تصویر نگاشت خطی

$$V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im} T = \langle T(v_1), \ldots, T(v_k) \rangle$$

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k \;\Rightarrow\; T(v) = T(t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k) = t_1 T(v_1) + \cdots + t_k T(v_k)$$

نگاشت‌های خطی



$$\overbrace{v_1, \dots, v_p}^{\alpha_1}, \overbrace{v_{p+1}, \dots, v_n}^{\alpha_2}$$

$$\downarrow \quad \dots \quad \downarrow \qquad \downarrow \quad \dots \quad \downarrow$$

$$0, \dots, 0, \underbrace{T(v_{p+1}), \dots, T(v_n)}_{\beta = T(\alpha_2)}$$

نگاشت‌های خطی

$$\overbrace{v_1, \dots, v_p}^{\alpha_1}, \overbrace{v_{p+1}, \dots, v_n}^{\alpha_2}$$

$$\downarrow \quad \dots \quad \downarrow \qquad \downarrow \quad \dots \quad \downarrow$$

$$0, \dots, 0, \underbrace{T(v_{p+1}), \dots, T(v_n)}_{\beta = T(\alpha_2)}$$

$$a_{p+1}T(v_{p+1}) + \dots + a_nT(v_n) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T(a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_nv_n) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_nv_n \in \ker T$$

نگاشت‌های خطی

$$\begin{array}{ccccc} \overbrace{v_1, \dots, v_p}^{\alpha_1}, & & \overbrace{v_{p+1}, \dots, v_n}^{\alpha_2} \\ \downarrow \quad \dots \quad \downarrow & & \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \\ 0, \dots, 0, & & \underbrace{T(v_{p+1}), \dots, T(v_n)}_{\beta = T(\alpha_2)} \end{array}$$

$$\begin{aligned} & a_{p+1}T(v_{p+1}) + \dots + a_n T(v_n) = 0 \\ \Rightarrow \quad & T(a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_n v_n) = 0 \\ \Rightarrow \quad & a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_n v_n \in \ker T \end{aligned}$$

نگاشت‌های خطی

$$
\begin{array}{cccccc}
\overbrace{v_1, \dots, v_p}^{\alpha_1}, & & & \overbrace{v_{p+1}, \dots, v_n}^{\alpha_2} & & \\
\downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\
0, & \dots, & 0, & \underbrace{T(v_{p+1}), \dots, T(v_n)}_{\beta = T(\alpha_2)} & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
& a_{p+1}T(v_{p+1}) + \cdots + a_n T(v_n) = 0 \\
\Rightarrow \quad & T(a_{p+1}v_{p+1} + \cdots + a_n v_n) = 0 \\
\Rightarrow \quad & a_{p+1}v_{p+1} + \cdots + a_n v_n \in \ker T
\end{aligned}
$$

نگاشت‌های خطی

$$\begin{array}{ccccc}
\overbrace{v_1 \,,\, \dots \,,\, v_p}^{\alpha_1} & , & \overbrace{v_{p+1} \,,\, \dots \,,\, v_n}^{\alpha_2} \\
\downarrow \quad \dots \quad \downarrow & & \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \\
0 \,,\, \dots \,,\, 0 & , & \underbrace{T(v_{p+1}) \,,\, \dots \,,\, T(v_n)}_{\beta = T(\alpha_2)}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
& a_{p+1}T(v_{p+1}) + \dots + a_n T(v_n) = 0 \\
\Rightarrow \quad & T(a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_n v_n) = 0 \\
\Rightarrow \quad & a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_n v_n \in \ker T
\end{aligned}$$

$$a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_n v_n = a_1 v_1 + \dots + a_p v_p$$

نگاشت‌های خطی

$$\begin{array}{ccccccc} \overbrace{v_1, \dots, v_p}^{\alpha_1}, & & \overbrace{v_{p+1}, \dots, v_n}^{\alpha_2} \\ \downarrow \quad \dots \quad \downarrow & & \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \\ 0, \dots, 0, & & \underbrace{T(v_{p+1}), \dots, T(v_n)}_{\beta = T(\alpha_2)} \end{array}$$

$$\begin{aligned} & a_{p+1}T(v_{p+1}) + \dots + a_nT(v_n) = 0 \\ \Rightarrow \quad & T(a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_nv_n) = 0 \\ \Rightarrow \quad & a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_nv_n \in \ker T \end{aligned}$$

$$a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_nv_n = a_1v_1 + \dots + a_pv_p$$

فرض کنید $T : V \to W$ نگاشتی خطی است. آنگاه

$$\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T) = \dim V$$

خلاصه

T یک به یک است $\Leftrightarrow$ $\ker T = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $\dim(\ker T) = 0$

T پوشا است $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} T = W$ $\Leftrightarrow$ $\dim(\operatorname{Im} T) = \dim W$

اگر $\dim V = \dim W$ آنگاه

$\dim(\ker T) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\dim(\operatorname{Im} T) = \dim W$

T یک به یک است $\Leftrightarrow$ T پوشا است

جمع برداری و ضرب اسکالر

$$U, T : S \to W$$

جمع برداری و ضرب اسکالر

$$U, T : S \to W$$

$$(T + U) : S \to W; \qquad (T + U)(s) := T(s) + U(s)$$

جمع برداری و ضرب اسکالر

$$U, T : S \to W$$

$$(T + U) : S \to W; \qquad (T + U)(s) := T(s) + U(s)$$

$$(rT) : S \to W; \qquad (rT)(s) := rT(s)$$

جمع برداری و ضرب اسکالر

$$U, T : S \to W$$

$$(T+U) : S \to W; \qquad (T+U)(s) := T(s) + U(s)$$

$$(rT) : S \to W; \qquad (rT)(s) := rT(s)$$

جمع دو نگاشت خطی و ضرب یک اسکالر در یک نگاشت خطی همچنان نگاشتی خطی است.

جمع برداری و ضرب اسکالر

$$U, T : S \to W$$

$$(T+U) : S \to W; \qquad (T+U)(s) := T(s) + U(s)$$

$$(rT) : S \to W; \qquad (rT)(s) := rT(s)$$

جمع دو نگاشت خطی و ضرب یک اسکالر در یک نگاشت خطی همچنان نگاشتی خطی است.

$$\begin{aligned}(T+rU)(v+tv') &= T(v+tv') + rU(v+tv') \\ &= T(v) + tT(v') + rU(v) + trU(v') \\ &= (T+rU)(v) + t(T+rU)(v')\end{aligned}$$

جمع برداری و ضرب اسکالر

$$(T+U): S \to W; \qquad (T+U)(s) := T(s) + U(s)$$
$$(rT): S \to W; \qquad (rT)(s) := rT(s)$$

جمع دو نگاشت خطی و ضرب یک اسکالر در یک نگاشت خطی همچنان نگاشتی خطی است.

$$\begin{aligned}(T+rU)(v+tv') &= T(v+tv') + rU(v+tv') \\ &= T(v) + tT(v') + rU(v) + trU(v') \\ &= (T+rU)(v) + t(T+rU)(v')\end{aligned}$$

جمع برداری و ضرب اسکالر

$$(T+U): S \to W; \qquad (T+U)(s) := T(s) + U(s)$$
$$(rT): S \to W; \qquad (rT)(s) := rT(s)$$

جمع دو نگاشت خطی و ضرب یک اسکالر در یک نگاشت خطی همچنان نگاشتی خطی است.

$$\begin{aligned}(T+rU)(v+tv') &= T(v+tv') + rU(v+tv') \\ &= T(v) + tT(v') + rU(v) + trU(v') \\ &= (T+rU)(v) + t(T+rU)(v')\end{aligned}$$

جمع برداری و ضرب اسکالر

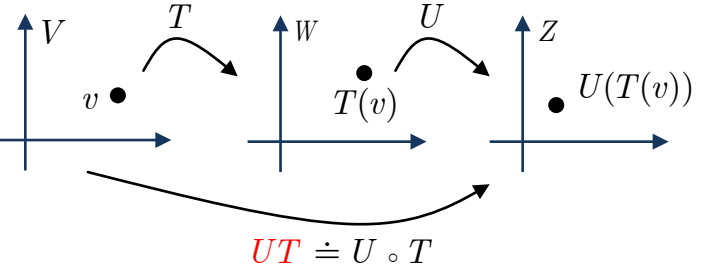
$$(T+U): S \to W; \qquad (T+U)(s) := T(s) + U(s)$$
$$(rT): S \to W; \qquad (rT)(s) := rT(s)$$

جمع دو نگاشت خطی و ضرب یک اسکالر در یک نگاشت خطی همچنان نگاشتی خطی است.

$$\begin{aligned}(T+rU)(v+tv') &= T(v+tv') + rU(v+tv') \\ &= T(v) + tT(v') + rU(v) + trU(v') \\ &= (T+rU)(v) + t(T+rU)(v')\end{aligned}$$

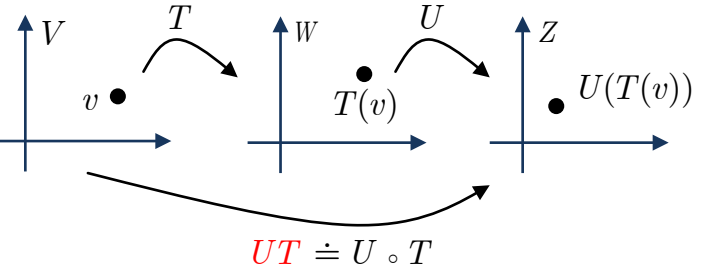
ترکیب نگاشت‌های خطی

ترکیب دو نگاشت خطی نگاشتی خطی است.



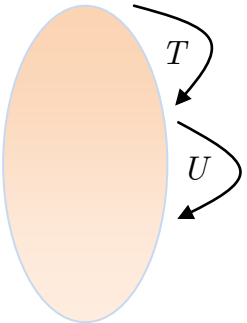
ترکیب نگاشت‌های خطی

ترکیب دو نگاشت خطی نگاشتی خطی است.

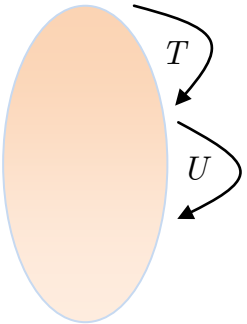


$$
\begin{aligned}
& UT(v+tv') \\
&= U(T(v+tv')) \\
&= U(T(v)+tT(v')) \\
&= U(T(v))+tU(T(v')) \\
&= UT(v)+tUT(v')
\end{aligned}
$$

نگاشت‌های خطی از V به V (عملگرهای خطی روی V)



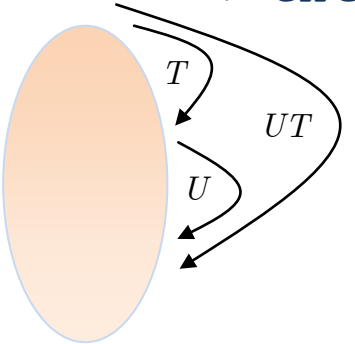
نگاشت‌های خطی از V به V (عملگرهای خطی روی V)



روی فضای $L(V,V)$ اعمال زیر وجود دارد

- جمع. $T+U$
- ضرب اسکالر. rT

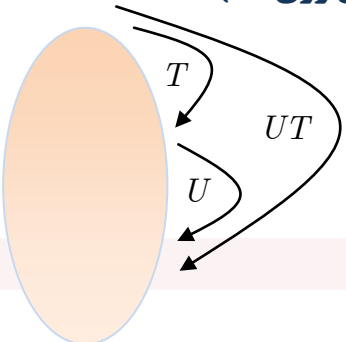
نگاشت‌های خطی از V به V (عملگرهای خطی روی V)



روی فضای $L(V,V)$ اعمال زیر وجود دارد

- جمع. $T+U$
- ضرب اسکالر. rT
- ضرب دو نگاشت (یا همان ترکیب آنها) UT

نگاشت‌های خطی از V به V (عملگرهای خطی روی V)



روی فضای $L(V,V)$ اعمال زیر وجود دارد

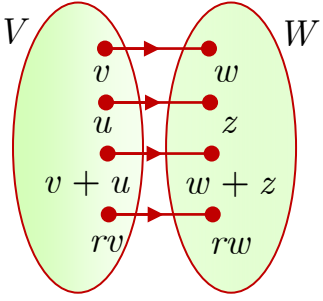
- جمع. $T+U$
- ضرب اسکالر. rT
- ضرب دو نگاشت (یا همان ترکیب آنها) UT

نکته. برای عملگر T داریم

T یک به یک است $\Leftrightarrow$ T پوشا است.

نگاشت‌های خطی وارون‌پذیر

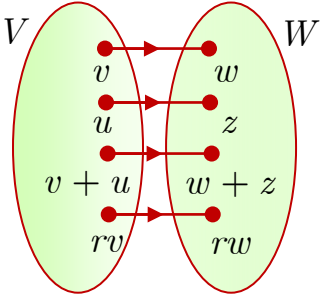
$T : V \to W$ نگاشت خطی وارون‌پذیر $\Leftarrow$ $T^{-1} : W \to V$ نگاشت خطی



نگاشت‌های خطی وارون‌پذیر

$T : V \to W$ **نگاشت خطی وارون‌پذیر** $\Leftarrow$ $T^{-1} : W \to V$ **نگاشت خطی**

در این حالت T را *یکریختی* یا *یکسانی* می‌نامیم و V و W را *یکریخت* یا *یکسان* می‌گوییم



ساختار جبری نگاشت‌های خطی

مختصات

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \qquad r \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_1 \\ \vdots \\ ra_n \end{bmatrix}$$

مختصات

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\} \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \quad r \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_1 \\ \vdots \\ ra_n \end{bmatrix}$$

مختصات

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\} \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \quad r \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_1 \\ \vdots \\ ra_n \end{bmatrix}$$

مختصات

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_۱, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\} \quad \begin{bmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_۱ \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_۱ + b_۱ \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \quad r \begin{bmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_۱ \\ \vdots \\ ra_n \end{bmatrix}$$

$$e_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix}, e_۲ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۱ \end{bmatrix}$$

مختصات

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\} \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \quad r \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_1 \\ \vdots \\ ra_n \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ پایه‌ای ویژه است. (ε_n)

مختصات

$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V

مختصات

$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n \quad \longrightarrow \quad [v]_\alpha = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \in F^n$$

مختصات

$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n \qquad \leftrightarrow \qquad [v]_\alpha = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

مختصات

$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n \qquad \leftrightarrow \qquad [v]_\alpha = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$[v]_\alpha$ را *نمایش بردار* v *در پایه* α می‌نامیم.

مختصات

$\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n \qquad \leftrightarrow \qquad [v]_\alpha = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$[v]_\alpha$ را *نمایش بردار* v *در پایه* α می‌نامیم.

با عوض شدن پایه α نمایش بردار v نیز عوض می‌شود.

مختصات

$\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n \qquad \leftrightarrow \qquad [v]_\alpha = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$[v]_\alpha$ را *نمایش بردار* v *در پایه* α می‌نامیم.

با عوض شدن پایه α نمایش بردار v نیز عوض می‌شود.

برای هر $X \in \mathbb{R}^n$ داریم

$$[X]_{\varepsilon_n} = X$$

مختصات

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n, \qquad v' = t'_1 v_1 + \cdots + t'_n v_n$$

مختصات

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n, \qquad v' = t'_1 v_1 + \cdots + t'_n v_n$$

$$v + rv' = (t_1 + rt'_1)v_1 + \cdots + (t_n + rt'_n)v_n$$

مختصات

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n, \qquad v' = t_1' v_1 + \cdots + t_n' v_n$$

$$v + rv' = (t_1 + rt_1')v_1 + \cdots + (t_n + rt_n')v_n$$

$$[v + rv']_\alpha = \begin{bmatrix} t_1 + rt_1' \\ \vdots \\ t_n + rt_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} t_1' \\ \vdots \\ t_n' \end{bmatrix} = [v]_\alpha + r[v']_\alpha$$

مختصات

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n, \qquad v' = t_1' v_1 + \cdots + t_n' v_n$$

$$v + rv' = (t_1 + rt_1')v_1 + \cdots + (t_n + rt_n')v_n$$

$$[v + rv']_\alpha = \begin{bmatrix} t_1 + rt_1' \\ \vdots \\ t_n + rt_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} t_1' \\ \vdots \\ t_n' \end{bmatrix} = [v]_\alpha + r[v']_\alpha$$

مختصات

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n, \qquad v' = t_1' v_1 + \cdots + t_n' v_n$$

$$v + rv' = (t_1 + rt_1')v_1 + \cdots + (t_n + rt_n')v_n$$

$$[v + rv']_\alpha = \begin{bmatrix} t_1 + rt_1' \\ \vdots \\ t_n + rt_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} t_1' \\ \vdots \\ t_n' \end{bmatrix} = [v]_\alpha + r[v']_\alpha$$

مختصات

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n, \qquad v' = t'_1 v_1 + \cdots + t'_n v_n$$

$$v + rv' = (t_1 + rt'_1)v_1 + \cdots + (t_n + rt'_n)v_n$$

$$[v + rv']_\alpha = \begin{bmatrix} t_1 + rt_1' \\ \vdots \\ t_n + rt_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} t_1' \\ \vdots \\ t_n' \end{bmatrix} = [v]_\alpha + r[v']_\alpha$$

نگاشت $v \mapsto [v]_\alpha$ یکسانی V با $\mathbb{R}^n$ است که پایه α را به پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ می‌نگارد

مختصات یک نگاشت خطی

$T : V \to W$ یک نگاشت خطی و $\alpha = \{v_1,..,v_n\}$ یک پایه برای V

مختصات یک نگاشت خطی

$T : V \to W$ یک نگاشت خطی و $\alpha = \{v_1,..,v_n\}$ یک پایه برای V

$$T \quad \Leftrightarrow \quad T(v_1),...,T(v_n)$$

مختصات یک نگاشت خطی

$T : V \to W$ یک نگاشت خطی و $\alpha = \{v_1,..,v_n\}$ یک پایه برای V

$$T \quad \Leftrightarrow \quad T(v_1),...,T(v_n)$$

β یک پایه W

$$T(v_1),...,T(v_n) \quad \Leftrightarrow \quad [T(v_1)]_\beta,...,[T(v_n)]_\beta$$

مختصات یک نگاشت خطی

$T : V \to W$ یک نگاشت خطی و $\alpha = \{v_1,..,v_n\}$ یک پایه برای V

$$T \qquad \Leftrightarrow \qquad T(v_1),...,T(v_n)$$

β یک پایه W

$$T(v_1),...,T(v_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad [T(v_1)]_\beta,...,[T(v_n)]_\beta$$

به این آرایه دو بعدی از اعداد در $\mathbb{R}$ *نمایش نگاشت خطی* T *در پایه‌های* α و β می‌گوییم. $[T]_\beta^\alpha$

مختصات

$$T(v_j) = b_j^1 w_1 + \cdots + b_j^m w_m$$

مختصات

$$T(v_j) = b_j^1 w_1 + \cdots + b_j^m w_m$$

$$[T]_\beta^\alpha = \left[[T(v_1)]_\beta \mid \ldots \mid [T(v_n)]_\beta \right] = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^m & \cdots & b_n^m \end{pmatrix}$$

مختصات

$$T(v_j) = b_j^1 w_1 + \cdots + b_j^m w_m$$

$$[T]_\beta^\alpha = \left[[T(v_1)]_\beta \mid \ldots \mid [T(v_n)]_\beta \right] = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^m & \cdots & b_n^m \end{pmatrix}$$

مختصات

$$T(v_j) = b_j^1 w_1 + \cdots + b_j^m w_m$$

$$[T]_\beta^\alpha = \left[[T(v_1)]_\beta \mid \ldots \mid [T(v_n)]_\beta \right] = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^m & \cdots & b_n^m \end{pmatrix}$$

ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad : \qquad A_{ij} = (A)_{ij} = a_{ij}$$

مختصات

$$T(v_j) = b_j^1 w_1 + \cdots + b_j^m w_m$$

$$[T]_\beta^\alpha = \left[[T(v_1)]_\beta \mid \ldots \mid [T(v_n)]_\beta \right] = \begin{pmatrix} b_1^1 & \ldots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^m & \cdots & b_n^m \end{pmatrix}$$

ماتریس $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad : \quad A_{ij} = (A)_{ij} = a_{ij}$$

مختصات

$$T(v_j) = b_j^1 w_1 + \cdots + b_j^m w_m$$

$$[T]_\beta^\alpha = \left[[T(v_1)]_\beta \mid \ldots \mid [T(v_n)]_\beta \right] = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^m & \cdots & b_n^m \end{pmatrix}$$

ماتریس $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad : \quad A_{ij} = (A)_{ij} = a_{ij}$$

نمایش نگاشت صفر

$$[\circ]_\beta^\alpha = [[\circ(v_1)]_\beta \mid \cdots \mid [\circ(v_n)]_\beta] = \begin{bmatrix} \circ & \cdots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \cdots & \circ \end{bmatrix}$$

ماتریس صفر $\circ$

نمایش نگاشت همانی

$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ یک پایه برای V

$$I_V(v_i) = v_i = 0v_1 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_n$$

نمایش نگاشت همانی

$\alpha = \{v_۱, \ldots, v_n\}$ یک پایه برای V

$$I_V(v_i) = v_i = ۰v_۱ + \cdots + ۱v_i + \cdots + ۰v_n$$

$$[I_V]_\alpha^\alpha = \left[[I_V(v_۱)]_\alpha \mid \cdots \mid [I_V(v_n)]_\alpha \right] = \begin{bmatrix} ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & \cdots & ۱ \end{bmatrix}$$

نمایش نگاشت همانی

$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ یک پایه برای V

$$I_V(v_i) = v_i = 0v_1 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_n$$

$$[I_V]_\alpha^\alpha = \left[[I_V(v_1)]_\alpha \mid \cdots \mid [I_V(v_n)]_\alpha \right] = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس همانی

$$(I)_{ij} = (I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

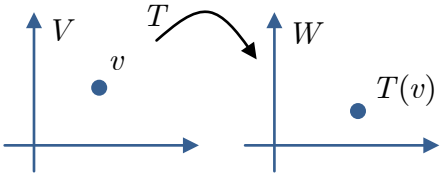
مختصات

- با مشخص بودن پایه‌های α و β

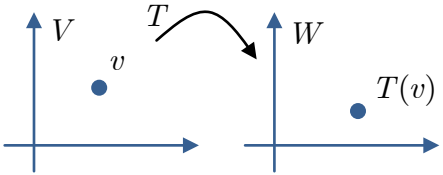
نگاشت‌های خطی $\leftrightarrow$ ماتریس‌های $m \times n$

- با عوض شدن پایه‌های α و β نمایش نگاشت خطی T نیز عوض می‌شود.

مختصات

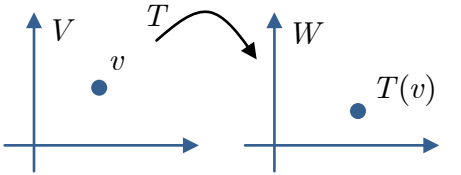


مختصات



$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ $\beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$

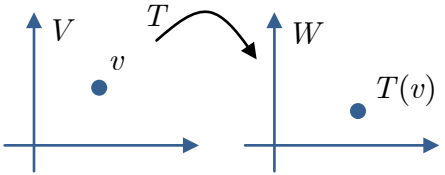
مختصات



$$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \qquad \beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

$$[T(v)]_\beta : \quad [T]_\beta^\alpha \quad [v]_\alpha$$

مختصات

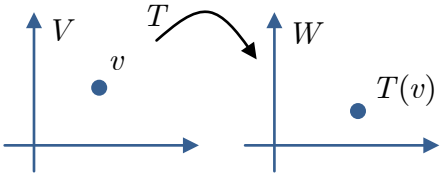


$$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \qquad \beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

$$[T(v)]_\beta : \quad [T]_\beta^\alpha \quad [v]_\alpha$$

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$$

مختصات



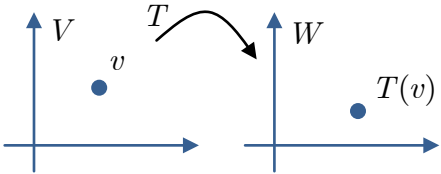
$$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \qquad \beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

$$[T(v)]_\beta : \quad [T]_\beta^\alpha \quad [v]_\alpha$$

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$$

$$[T(v)]_\beta = [t_1 T(v_1) + \cdots t_n T(v_n)]_\beta$$

مختصات



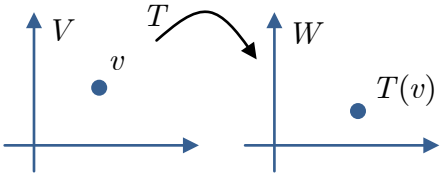
$$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \qquad \beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

$$[T(v)]_\beta : \quad [T]_\beta^\alpha \quad [v]_\alpha$$

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$$

$$\begin{aligned}[T(v)]_\beta &= [t_1 T(v_1) + \cdots t_n T(v_n)]_\beta \\ &= t_1 [T(v_1)]_\beta + \cdots + t_n [T(v_n)]_\beta\end{aligned}$$

مختصات



$$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \qquad \beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

$$[v]_\alpha$$

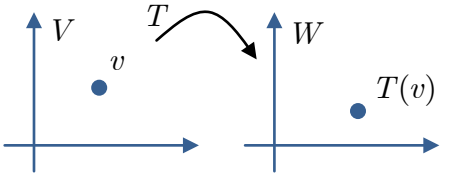
$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$$

$$[T(v)]_\beta : \quad [T]_\beta^\alpha \quad [v]_\alpha$$

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$$

$$\begin{aligned} [T(v)]_\beta &= [t_1 T(v_1) + \cdots t_n T(v_n)]_\beta \\ &= t_1 [T(v_1)]_\beta + \cdots + t_n [T(v_n)]_\beta \end{aligned}$$

مختصات



$$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \qquad \beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

$$[T]_\beta^\alpha \qquad [v]_\alpha$$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$$

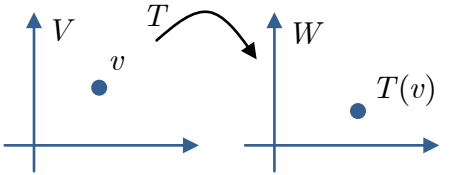
$$[T(v)]_\beta : \quad [T]_\beta^\alpha \quad [v]_\alpha$$

$$[T(v_1)]_\beta \quad [T(v_n)]_\beta$$

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$$

$$\begin{aligned} [T(v)]_\beta &= [t_1 T(v_1) + \cdots t_n T(v_n)]_\beta \\ &= t_1 [T(v_1)]_\beta + \cdots + t_n [T(v_n)]_\beta \end{aligned}$$

مختصات



$$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \qquad \beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

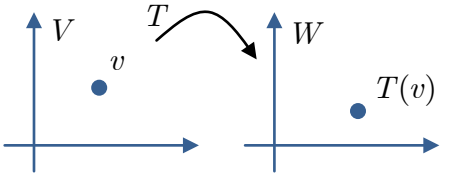
$$[T(v)]_\beta : \quad [T]_\beta^\alpha \quad [v]_\alpha$$

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$$

$$\begin{aligned}[T(v)]_\beta &= [t_1 T(v_1) + \cdots t_n T(v_n)]_\beta \\ &= t_1 [T(v_1)]_\beta + \cdots + t_n [T(v_n)]_\beta\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} [T]_\beta^\alpha & [v]_\alpha \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \\ [T(v_1)]_\beta \quad [T(v_n)]_\beta & \end{array}$$

مختصات



$$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \qquad \beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

$$[T(v)]_\beta : \quad [T]_\beta^\alpha \quad [v]_\alpha$$

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$$

$$\begin{aligned}[T(v)]_\beta &= [t_1 T(v_1) + \cdots t_n T(v_n)]_\beta \\ &= t_1 [T(v_1)]_\beta + \cdots + t_n [T(v_n)]_\beta\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} [T]_\beta^\alpha & [v]_\alpha \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} [T(v_1)]_\beta & [T(v_n)]_\beta \\ A_1 & A_n \end{array}$$

$$[T(v)]_\beta = t_1 A_1 + \cdots + t_n A_n$$

اثر (یا ضرب) یک ماتریس $m \times n$ روی یک ستون n تایی

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

اثر (یا ضرب) یک ماتریس $m \times n$ روی یک ستون n تایی

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$AB = b_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + b_n \begin{bmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

اثر (یا ضرب) یک ماتریس $m \times n$ روی یک ستون n تایی

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A_1 \qquad A_n$$

$$AB = b_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + b_n \begin{bmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

اثر (یا ضرب) یک ماتریس $m \times n$ روی یک ستون n تایی

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A_1 \qquad A_n$$

$$AB = b_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + b_n \begin{bmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} = b_1 A_1 + \cdots + b_n A_n$$

اثر (یا ضرب) یک ماتریس $m \times n$ روی یک ستون n تایی

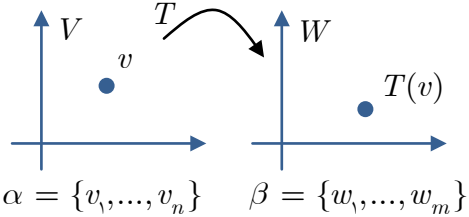
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A_1 \qquad A_n$$

$$AB = \begin{bmatrix} \vdots \\ a_{i1}b_1 + \cdots + a_{in}b_n \\ \vdots \end{bmatrix} \longrightarrow$$

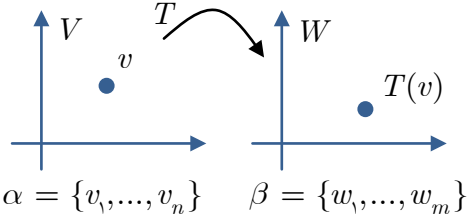
درایه i ام

اثر (یا ضرب) یک ماتریس $m \times n$ روی یک ستون n تایی



$[T(v)]_\beta : \quad [T]_\beta^\alpha \quad [v]_\alpha$

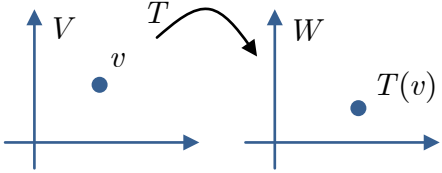
اثر (یا ضرب) یک ماتریس $m \times n$ روی یک ستون n تایی



$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [v]_\alpha$$

$[T(v)]_\beta$: $[T]_\beta^\alpha$ $[v]_\alpha$

اثر (یا ضرب) یک ماتریس $m \times n$ روی یک ستون n تایی



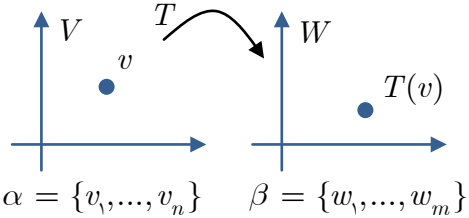
$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ $\quad$ $\beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$

$[T(v)]_\beta : \quad [T]_\beta^\alpha \quad [v]_\alpha$

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [v]_\alpha$$

ستون n تایی

اثر (یا ضرب) یک ماتریس $m \times n$ روی یک ستون n تایی

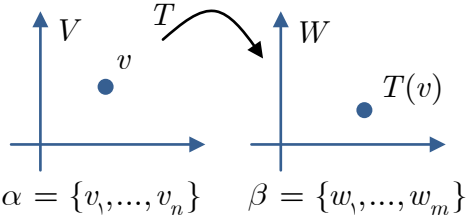


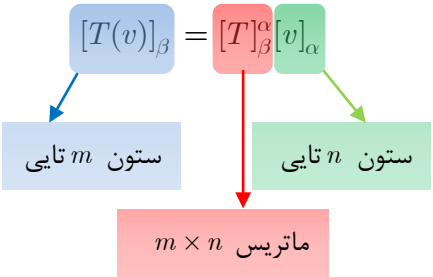
$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [v]_\alpha$$

ستون n تایی

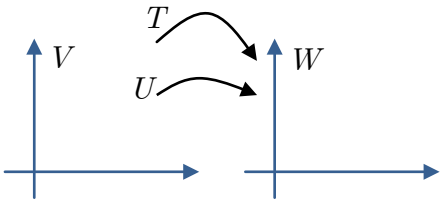
ماتریس $m \times n$

اثر (یا ضرب) یک ماتریس $m \times n$ روی یک ستون n تایی



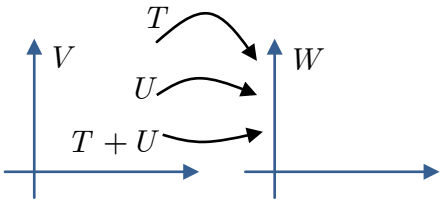


نمایش ماتریسی جمع دو نگاشت خطی



$$T, U : V \to W$$

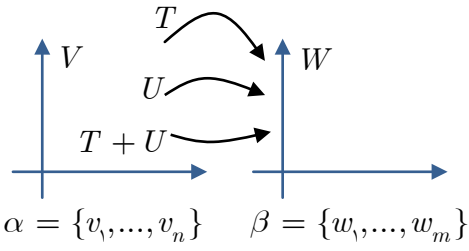
نمایش ماتریسی جمع دو نگاشت خطی



$$T,U : V \to W$$

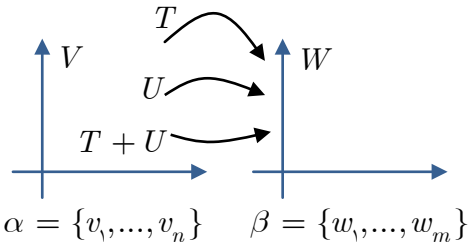
نمایش ماتریسی جمع دو نگاشت خطی

$$T, U : V \to W$$



نمایش ماتریسی جمع دو نگاشت خطی

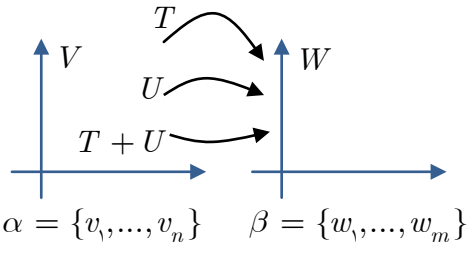
$$T, U : V \to W$$



$$[T+U]_\beta^\alpha : \quad [T]_\beta^\alpha \quad [U]_\beta^\alpha$$

نمایش ماتریسی جمع دو نگاشت خطی

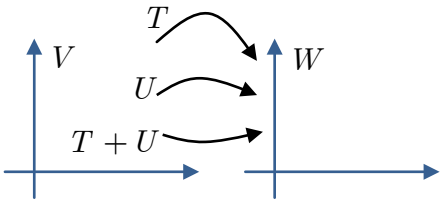
$$T, U : V \to W$$



$$[T+U]_\beta^\alpha : \quad [T]_\beta^\alpha \quad [U]_\beta^\alpha$$

$$[(T+U)(v_i)]_\beta = [T(v_i)]_\beta + [U(v_i)]_\beta$$

نمایش ماتریسی جمع دو نگاشت خطی



$$T, U : V \to W$$

$$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \qquad \beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

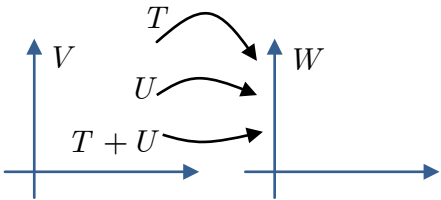
$$[T+U]_\beta^\alpha : \quad [T]_\beta^\alpha \quad [U]_\beta^\alpha$$

$$[(T+U)(v_i)]_\beta = [T(v_i)]_\beta + [U(v_i)]_\beta$$

ستون i ام $[U]_\beta^\alpha$

نمایش ماتریسی جمع دو نگاشت خطی

$$T, U : V \to W$$



$$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \qquad \beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

$$[T+U]_\beta^\alpha : \quad [T]_\beta^\alpha \quad [U]_\beta^\alpha$$

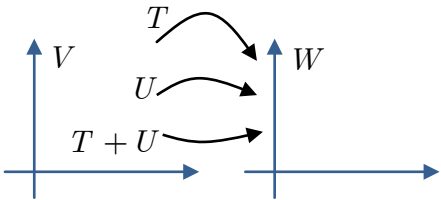
$$[(T+U)(v_i)]_\beta = [T(v_i)]_\beta + [U(v_i)]_\beta$$

ستون i ام $[T]_\beta^\alpha$

ستون i ام $[U]_\beta^\alpha$

نمایش ماتریسی جمع دو نگاشت خطی

$$T, U : V \to W$$



$$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \qquad \beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

$$[T+U]_\beta^\alpha : \quad [T]_\beta^\alpha \quad [U]_\beta^\alpha$$

$$[(T+U)(v_i)]_\beta = [T(v_i)]_\beta + [U(v_i)]_\beta$$

ستون i ام $[T+U]_\beta^\alpha$ | ستون i ام $[T]_\beta^\alpha$ | ستون i ام $[U]_\beta^\alpha$

جمع دو ماتریس $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

جمع دو ماتریس $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

جمع دو ماتریس $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

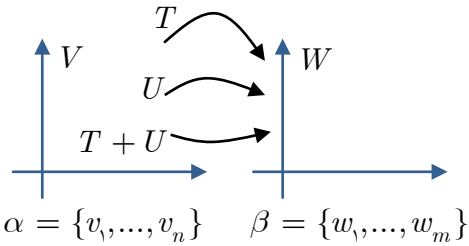
$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

جمع دو ماتریس $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \qquad (A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$$

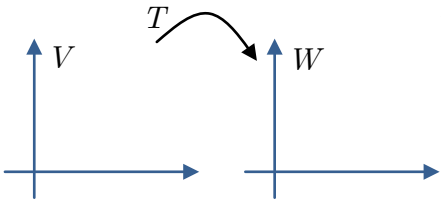
نمایش ماتریسی جمع دو نگاشت خطی



$$T, U : V \to W$$

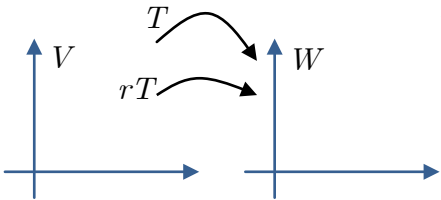
$$[T+U]_\beta^\alpha = [T]_\beta^\alpha + [U]_\beta^\alpha$$

نمایش ماتریسی r برابر یک نگاشت خطی



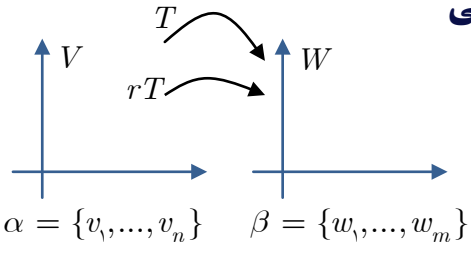
$$T : V \to W$$

نمایش ماتریسی r برابر یک نگاشت خطی



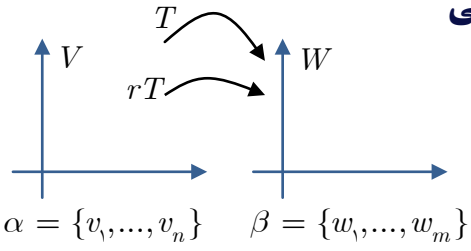
$$T : V \to W$$

نمایش ماتریسی r برابر یک نگاشت خطی



$$T : V \to W$$

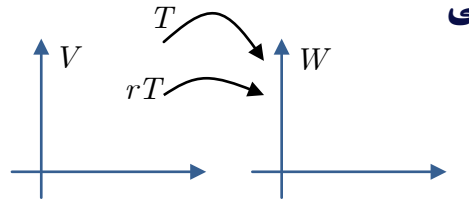
نمایش ماتریسی r برابر یک نگاشت خطی



$$T : V \to W$$

$$[rT]_\beta^\alpha : \quad r \quad [T]_\beta^\alpha$$

نمایش ماتریسی r برابر یک نگاشت خطی



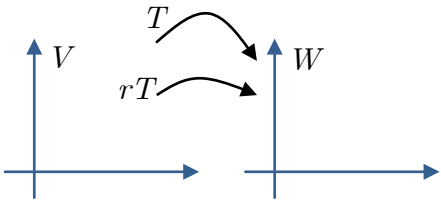
$$T : V \to W$$

$$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \qquad \beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

$$[rT]_\beta^\alpha : \quad r \quad [T]_\beta^\alpha$$

$$[(rT)(v_i)]_\beta = [rT(v_i)]_\beta = r[T(v_i)]_\beta$$

نمایش ماتریسی r برابر یک نگاشت خطی



$$T : V \to W$$

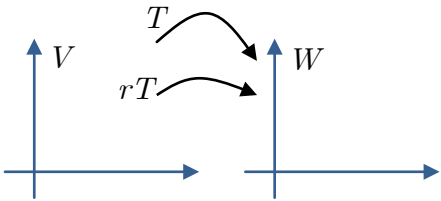
$$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \qquad \beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

$$[rT]_\beta^\alpha : \quad r \quad [T]_\beta^\alpha$$

$$[(rT)(v_i)]_\beta = [rT(v_i)]_\beta = r[T(v_i)]_\beta$$

ستون i ام $[T]_\beta^\alpha$

نمایش ماتریسی r برابر یک نگاشت خطی



$$T : V \to W$$

$$\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\} \qquad \beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

$$[rT]_\beta^\alpha : \quad r \quad [T]_\beta^\alpha$$

$$[(rT)(v_i)]_\beta = [rT(v_i)]_\beta = r[T(v_i)]_\beta$$

ستون i ام $[rT]_\beta^\alpha$

ستون i ام $[T]_\beta^\alpha$

r برابر یک ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

r برابر یک ماتریس

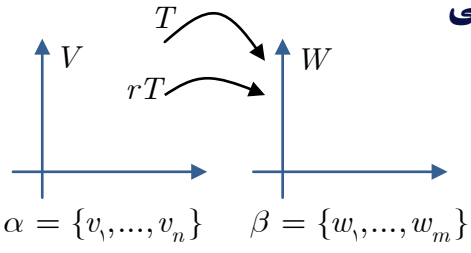
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad rA = \begin{bmatrix} ra_{11} & \cdots & ra_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{m1} & \cdots & ra_{mn} \end{bmatrix}$$

r برابر یک ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad rA = \begin{bmatrix} ra_{11} & \cdots & ra_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{m1} & \cdots & ra_{mn} \end{bmatrix}$$

$$(rA)_{ij} = r(A)_{ij}$$

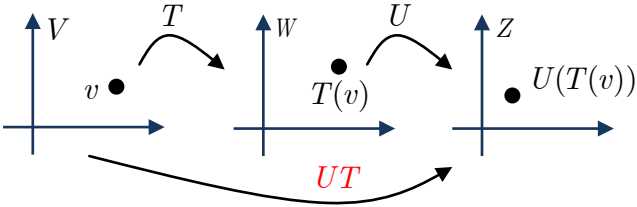
نمایش ماتریسی r برابر یک نگاشت خطی



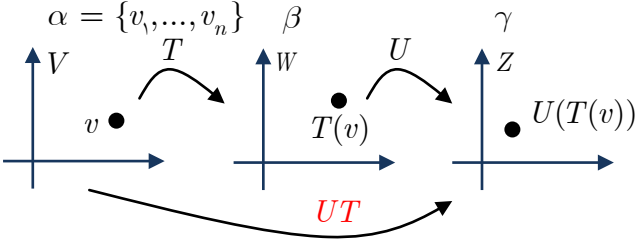
$$T : V \to W$$

$$[rT]_\beta^\alpha = r[T]_\beta^\alpha$$

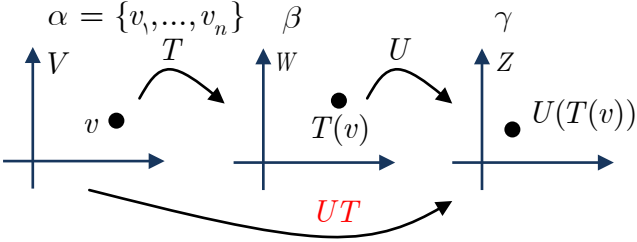
نمایش ماتریسی ترکیب دو نگاشت خطی



نمایش ماتریسی ترکیب دو نگاشت خطی

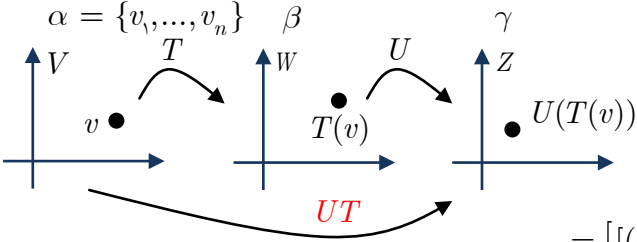


نمایش ماتریسی ترکیب دو نگاشت خطی



$$[UT]_\gamma^\alpha : \quad [U]_\gamma^\beta \quad [T]_\beta^\alpha$$

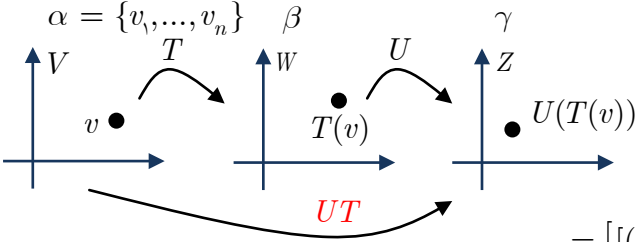
نمایش ماتریسی ترکیب دو نگاشت خطی



$$[UT]_\gamma^\alpha = \left[[(UT)(v_1)]_\gamma \mid \cdots \mid [(UT)(v_n)]_\gamma \right]$$

$$[UT]_\gamma^\alpha : \quad [U]_\gamma^\beta \quad [T]_\beta^\alpha$$

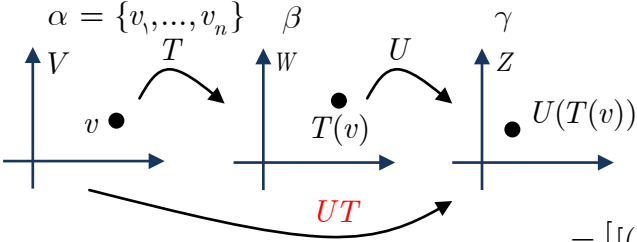
نمایش ماتریسی ترکیب دو نگاشت خطی



$$[UT]_\gamma^\alpha$$
$$= \Big[[(UT)(v_1)]_\gamma \mid \cdots \mid [(UT)(v_n)]_\gamma \Big]$$
$$= \Big[[U(T(v_1))]_\gamma \mid \cdots \mid [U(T(v_n))]_\gamma \Big]$$

$$[UT]_\gamma^\alpha : \quad [U]_\gamma^\beta \quad [T]_\beta^\alpha$$

نمایش ماتریسی ترکیب دو نگاشت خطی



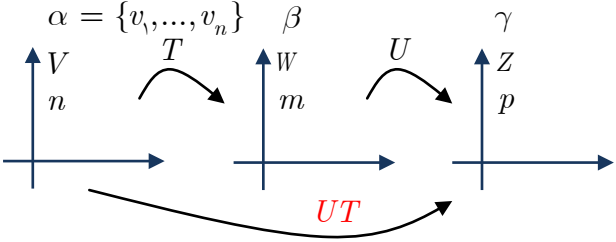
$$[UT]_\gamma^\alpha$$

$$= \Big[[(UT)(v_1)]_\gamma \mid \cdots \mid [(UT)(v_n)]_\gamma \Big]$$

$$= \Big[[U(T(v_1))]_\gamma \mid \cdots \mid [U(T(v_n))]_\gamma \Big]$$

$$[UT]_\gamma^\alpha : \quad [U]_\gamma^\beta \quad [T]_\beta^\alpha \qquad = \Big[[U]_\gamma^\beta [T(v_1)]_\beta \mid \cdots \mid [U]_\gamma^\beta [T(v_n)]_\beta \Big]$$

نمایش ماتریسی ترکیب دو نگاشت خطی



$$[UT]_\gamma^\alpha : \quad \overset{p \times m}{[U]_\gamma^\beta} \quad \overset{m \times n}{[T]_\beta^\alpha} \longrightarrow \overset{p \times n}{\Big[[U]_\gamma^\beta [T(v_1)]_\beta \mid \cdots \mid [U]_\gamma^\beta [T(v_n)]_\beta \Big]}$$

اثر (یا ضرب) یک ماتریس $p \times m$ روی یک ماتریس $m \times n$

$$M = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & a_{pm} \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$p \times m \qquad\qquad m \times n$$

اثر (یا ضرب) یک ماتریس $p \times m$ روی یک ماتریس $m \times n$

$$M = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & a_{pm} \end{bmatrix} \quad N = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} N_1 & & N_n \end{array} \end{array}$$

اثر (یا ضرب) یک ماتریس $p \times m$ روی یک ماتریس $m \times n$

$$M = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & a_{pm} \end{bmatrix} \quad N = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} N_1 & & N_n \end{array} \end{array}$$

$$MN = [MN_1 \mid \cdots \mid MN_n]$$

اثر (یا ضرب) یک ماتریس $p \times m$ روی یک ماتریس $m \times n$

$$M = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & a_{pm} \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$N_1 \qquad N_n$$

$$\begin{aligned} MN &= [MN_1 \mid \cdots \mid MN_n] \\ (MN)_{ij} &= b_{i1}a_{1j} + \cdots + b_{im}a_{mj} \\ &= (M)_{i1}(N)_{1j} + \cdots + (M)_{im}(N)_{mj} \end{aligned}$$

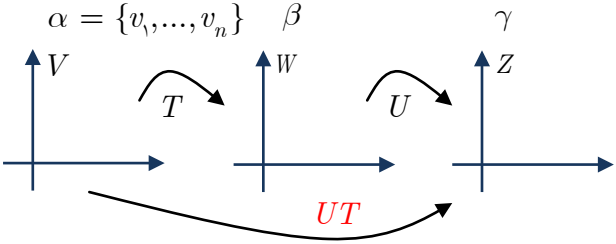
اثر (یا ضرب) یک ماتریس $p \times m$ روی یک ماتریس $m \times n$

$$M = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & a_{pm} \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad MN$$

$$p \times m \qquad\qquad m \times n \qquad\qquad p \times n$$

$$\begin{aligned} MN &= [MN_1 \mid \cdots \mid MN_n] \\ (MN)_{ij} &= b_{i1}a_{1j} + \cdots + b_{im}a_{mj} \\ &= (M)_{i1}(N)_{1j} + \cdots + (M)_{im}(N)_{mj} \end{aligned}$$

نمایش ماتریسی ترکیب دو نگاشت خطی



$$[UT]_\gamma^\alpha = [U]_\gamma^\beta [T]_\beta^\alpha$$